Grado M+I
Curso 2015-2016

Cálculo I

Matemática Aplicada
ETSINF-UPM

Cálculo diferencial - Entrega 9

Aplicaciones

APELLIDOS: NOMBRE:	Nota:

Ejercicio 1. Halla un número real a para que la función $f(x) = \dfrac{x(x-a)}{x^2+1}$ tenga un máximo relativo en $x = 1$.

Nota:

Ejercicio 2. Analiza si es posible aplicar el teorema de Rolle a las funciones siguientes en los intervalos que se indican.

Nota:

i) $f(x) = |x|$ en $[-1, 1]$

ii) $f(x) = x^2 - (a+b)x + ba$ en $[a, b]$

Ejercicio 3. Encuentra una condición suficiente deben satisfacer $a_0, a_1, \ldots, a_n$ para que la ecuación $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$, posea al menos una raíz real en $(0, 1)$.

Nota:

1. Aplicando el teorema de Rolle.

2. Aplicando el teorema de Bolzano.

Ejercicio 4. Sea $f(x) = \tan x$. Recuérdese que $f(\pi) = f(0) = 0$. Demostrar que no hay ningún número $c \in (0, \pi)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué esto no contradice el teorema del valor medio?

Nota:

Ejercicio 5. Comprueba que la función $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ satisface las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Halla todos los números $c \in (0, 2)$ que verifican $\dfrac{f(2) - f(0)}{2} = f'(c)$.

Nota:

Ejercicio 6. Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, calcula el límite siguiente utilizando el teorema del valor medio. Nota:

$$\lim_{x\to\infty} \left[\sqrt[3]{f(x+1)} - \sqrt[3]{f(x)} \right] =$$

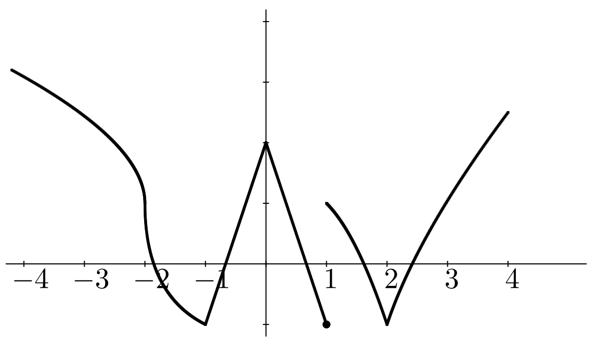
Ejercicio 7. Prueba, con el teorema del valor medio que $e^x > x + 1 \ \forall x > 0$. Nota:

Ejercicio 8. Calcula el límite siguiente utilizando la regla de L'Hôpital. Nota:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^3} =$$

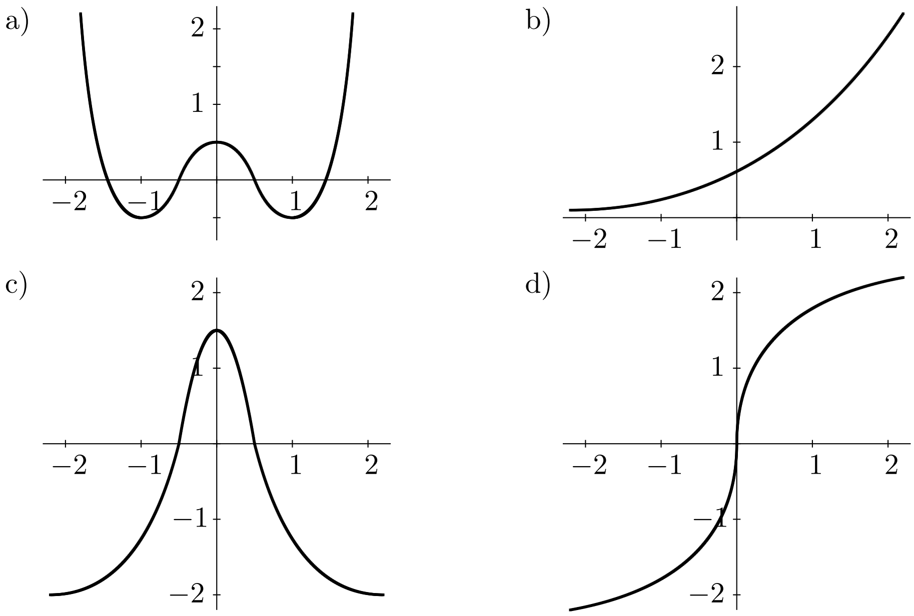
Ejercicio 9. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos de la función $f(x) = -3x^5 + 5x^3$. Nota:

Ejercicio 10. La siguiente figura muestra la gráfica de f. Nota:



1. Señala los puntos del intervalo $[-4, 4]$ en los que f no es derivable.
2. ¿Hay puntos con derivada nula? ☐ Si ☐ No
3. ¿hay extremos relativos? ☐ Si ☐ No
4. ¿Hay extremos absolutos? ☐ Si ☐ No

Ejercicio 11. A continuación se dan las gráficas de algunas funciones.

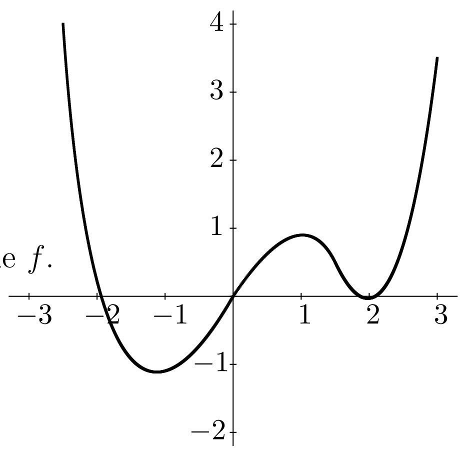


Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada función y esboza la gráfica de su derivada.

Ejercicio 12. La siguiente figura muestra la gráfica de f', **la derivada** de f. Nota:

i) Indica los máximos y mínimos relativos de f.

ii) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.



iii) Si $f(-3) = -2$, esboza la gráfica de f.

Ejercicio 13. Calcula el polinomio de Taylor $P_{4,0}$ de grado 4 de $f(x) = \sqrt{3-x}$ en $x = 0$. Utiliza $P_{4,0}$ para obtener un valor aproximado de $\sqrt{2.99}$, dando una estimación del error cometido. Nota:

Ejercicio 14. Cuestiones: Prueba las siguientes afirmaciones. | Nota: |

i) Una función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces existe a lo sumo una solución de $f(x) = 0$.

ii) Una función $f(x)$ es dos veces derivable en $\mathbb{R}$. Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces existe a lo sumo una solución de la ecuación $f'(x) = 0$.

iii) Sea $f(x)$ una función derivable y par. Si $f(1) = f(2) = 0$, existen al menos dos soluciones distintas de la ecuación $f'(x) = 0$.

iv) Prueba que si $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$ y verifica verifica la condición siguiente, entonces $f(x)$ es constante.

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^2, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad \text{con} \quad K > 0.$$

v) Prueba que $x - \dfrac{x^2}{2} < \log(x + 1) < x$ para todo $x > 0$.

vi) La ecuación $x^5 + 8x + 1$ tiene una única raíz real.

vii) La ecuación $x^4 - 8x - 2$ tiene exactamente dos raíces reales.

viii) Si $f'(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^x + C$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

ix) Si $f'(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $f(0) = 1$ entonces $f(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2}$.